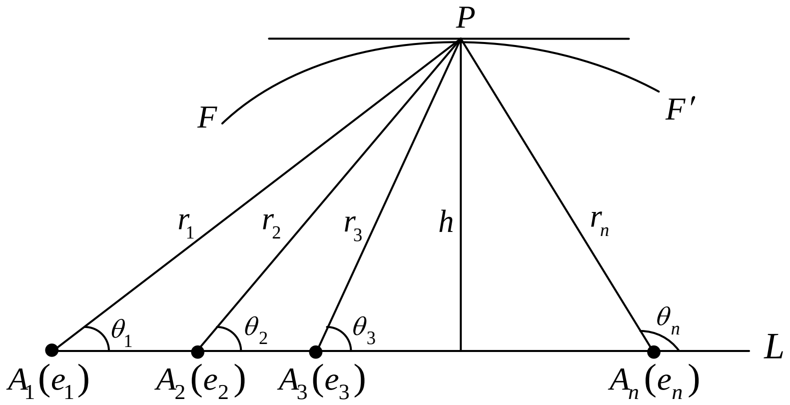
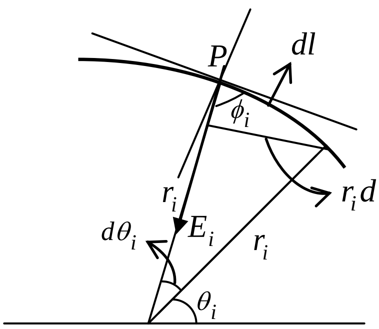
إجابة اختبار مادة الكهربيه الساكنه للفرقة الثالثة كلية التربية شعبة رياضه عام نظام قديم العام الدراسي 2013/2012
الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار 2013/1/2 (نصف ورقه امتحانيه)
أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ- معادلة خطوط القوى لمجموعة من الشحنات موضوعة على استقامة واحدة :



نفرض أن مجموعة من الشحنات $e_1, e_2, \dots, e_n$ موضوعة عند النقط $A_1, A_2, \dots, A_n$ ونفرض أن P نقطة تقع على خط القوى FF' 0نفرض أن $r_1, r_2, \dots, r_n$ هي أبعاد النقطة P عن $A_1, A_2, \dots, A_n$ ويصنعوا زوايا $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ مع L 0 شدة المجال الناتج عن كل من الشحنات $e_1, e_2, \dots, e_n$ عند النقطة P هي على الترتيب



$$\frac{e_1}{r_1^3}\underline{r_1}\,,\ \frac{e_2}{r_2^3}\underline{r_2}\,,\ \frac{e_3}{r_3^3}\underline{r_3}\,,\dots,\ \frac{e_n}{r_n^3}\underline{r_n} \qquad (1)$$

إذن شدة المجال الكلي $\underline{E}$ عند النقطة P تساوي

$$\underline{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i^3}\underline{r_i} \qquad (2)$$

بما أن FF' هو خط للقوى إذن شدة المجال تكون في اتجاه المماس 0 أي أن مركبة شدة المجال في الاتجاه العمودي على المماس تنعدم أي أن

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i^2}\sin\phi_i = 0 \qquad (3)$$

حيث ϕ_i هي الزاوية التي يصنعها المماس عند النقطة P مع r_i 0 ولكن

$$\sin\phi_i = \frac{r_i\, d\theta_i}{dl} \qquad , \qquad \sin\theta_i = \frac{h}{r_i}$$

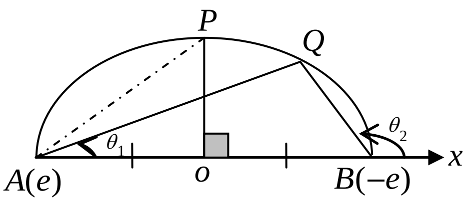
بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i^2}\cdot r_i\frac{d\theta_i}{dl} = 0 \ \Rightarrow\ \therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i}\cdot\frac{d\theta_i}{dl} = 0 \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{h}\sin\theta_i\frac{d\theta_i}{dl} = 0 \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} e_i\frac{d}{dl}(\cos\theta_i) = 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} e_i\,\cos\theta_i = const. \qquad (4)$$

والمعادلة (4) هي معادلة خطوط القوى الناتجة عن مجموعة من الشحنات عددها n موضوعة على استقامة واحدة

ب-



نفرض أن Q أي نقطة على خـط القوة ونفرض أن
$\theta_1 = \angle BAQ$ ، $\theta_2 = \angle XBQ$ إذن من الفرض
عنـدما $Q \to A, \theta_1 \to \alpha$ فإن $\theta_2 \to \pi$ 0 معادلة خط القوة هي

$$e\cos\theta_1 - e\cos\theta_2 = c \qquad (c \quad is\ a\ const.) \qquad (a)$$

عندما $Q \to A, \theta_1 \to \alpha$ فإن $\theta_2 \to \pi$ نحصل على $e\cos\alpha + e = c$ وبالتعويض عن قيمة c ينتج أن

$$e\cos\theta_1 - e\cos\theta_2 = e\cos\alpha + e$$

$$\therefore\ \cos\theta_1 - \cos\theta_2 = \cos\alpha + 1 = 2\cos^2(\alpha/2) \qquad \text{(b)}$$

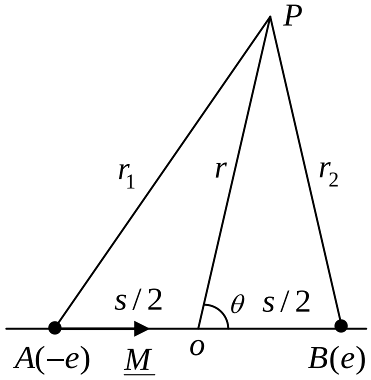
عند النقطة P التي تقع على المستوى الذي ينصف AB ويتعامد عليه ، تكون $\theta_1 = \angle PAB = \beta \quad say\ ,\ \theta_2 = \pi - \beta$
لذلك تصبح المعادلة (b) على الصورة

$$\cos\beta - \cos(\pi - \beta) = \cos\alpha + 1$$

$$2\cos\beta = \cos\alpha + 1 \qquad \text{(c)}$$

باستخدام العلاقة $\cos 2x = 1 - 2\sin^2\alpha$ تصبح المعادلة (c) على الصورة

$$2\left(1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \therefore\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\,\sin\frac{\beta}{2}$$



إجابة السؤال الثاني

نفرض أن $-e, e$ شحنتان متساويتان في الشحنة ولكن إحداهما سالبة والأخرى موجبة موضوعتـان عند النقطتين A, B على الترتيب 0 نفرض أن $s \to 0$ ، $e \to \infty$ في هذه الحالة فإن se سوف تؤول إلى كمية محددة ولتكن M 0هذا النظام المكون من هاتين الشحنتين والذي يخضع للشروط السابق ذكرها يسـمى بالمزدوج الكهربي والكمية M تسمى عزم المزدوج 0
والاتجـاه الموجب لهذا المزدوج يكون من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة

<u>جهد المزدوج الكهربي عند نقطة :</u>

نفرض أن P أي نقطة ونفرض أن $AP = r_1\ ,\ BP = r_2$ ، إذن الجهد عند P يساوي

$$V_P = -\frac{e}{r_1} + \frac{e}{r_2} \qquad (1)$$

من المثلث $\Delta\ PoA$ نجد أن

$$r_1^2 = r^2 + (s/2)^2 - 2r\cdot(s/2)\cos(\pi - \theta) = r^2 + (s/2)^2 + 2r\cdot(s/2)\cos\theta$$

لكن في حالة عندما تكون s كمية صغيرة جداً يمكن إهمال الحدود التي تحتوي $o(s^2)$ ، إذن

$$r_1^2 = r^2\left(1 + \frac{s}{r}\cos\theta\right) \Rightarrow \therefore r_1 = r\sqrt{1 + \frac{s}{r}\cos\theta} = r\left(1 + \frac{s}{r}\cos\theta\right)^{1/2} = r\left(1 + \frac{s}{2r}\cos\theta + o(s^2)\right)$$

$$\therefore r_1 = r\left(1 + \frac{s}{2r}\cos\theta\right) \qquad (2)$$

وبنفس الطريقة من المثلث $\Delta\ PoB$ نجد أن

$$r_2 = r\left(1 - \frac{s}{2r}\cos\theta\right) \qquad (3)$$

بالتعويض من (2),(3) في المعادلة (1) نجد أن

$$V_P = \frac{e}{r}\left[-\left(1 - \frac{s}{2r}\cos\theta + o(s^2)\right) + \left(1 + \frac{s}{2r}\cos\theta + o(s^2)\right)\right] = \frac{e}{r}\left[-1 + \frac{s}{2r}\cos\theta + 1 + \frac{s}{2r}\cos\theta\right]$$

$$\therefore\ V_P = \frac{es}{r^2}\cos\theta \qquad (4)$$

عندما $s \to 0\ ,\ e \to \infty$ فإن $es \to M$

$$\therefore\ V_P = \frac{M}{r^2}\cos\theta \qquad (5)$$

ولكن اتجاه العزم M من A إلى B

$$\therefore \underline{M}\cdot\underline{r} = Mr\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \therefore M\cos\theta = \frac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r}$$

$$\therefore V_P = \frac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3} \tag{6}$$

ولكننا نعلم من التحليل الاتجاهي أن $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\underline{r}}{r^3}$ ، إذن المعادلة (6) تصبح على الصورة

$$V_P = -\underline{M}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \tag{7}$$

سبق وان درسنا أن المجال الكهربي يتعين من العلاقة $\underline{E} = -\nabla V$ وأثبتنا أن جهد المزدوج V هو

$$V = \frac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3} = \frac{M}{r^2}\cos\theta$$

ونلاحظ أن الجهد يعتمد على r,θ لذلك يكون للمجال الكهروستاتيكي مركبتين الأولى في اتجاه r ونرمز لها بالرمز E_r والأخرى في اتجاه θ ونرمز لها بالرمز E_θ 0 أي أن

$$\underline{E} = E_r\,\hat{r} + E_\theta\,\hat{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} = \frac{2M}{r^3}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{M}{r^3}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

أي أن مركبات المجال الكهربي في اتجاه r,θ هما على الترتيب

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2M}{r^3}\cos\theta,\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{M}{r^3}\sin\theta$$

$$\therefore E^2 = E_r^2 + E_\theta^2 = \frac{M^2}{r^6}(1+3\cos^2\theta)$$

$$\therefore E = |\underline{E}| = \frac{M}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

وإذا كان المجال الكهروستاتيكي $\underline{E}$ يصنع زاوية ϕ مع الأفقي فإننا نحصل على

$$\tan\phi = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{M\sin\theta/r^3}{2M\cos\theta/r^3} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

خطوط القوى للمزدوج الكهربى :

سبق وأن أثبتنا أن

$$\underline{E} = \frac{2M}{r^3}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{M}{r^3}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

ولكن معادلة خطوط القوى هي

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \quad\Rightarrow\quad \therefore \frac{dr}{2M\cos\theta/r^3} = \frac{rd\theta}{M\sin\theta/r^3}$$

$$\therefore \int\frac{dr}{r} = 2\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta + c_1 \quad\Rightarrow\quad \therefore \ln r = 2\ln\sin\theta + \ln c \quad\Rightarrow\quad \therefore \ln(r/\sin^2\theta) = \ln c$$

$$r = c\sin^2\theta \qquad , \quad c \text{ is a const.} \tag{a}$$

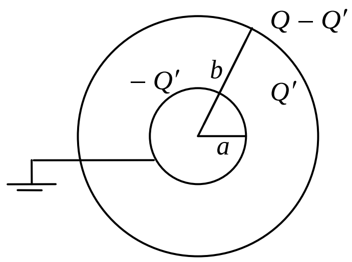
المعادلة (a) هي معادلة خطوط القوى للمزدوج الكهربي حيث الثابت c يأخذ قيم مختلفة 0

إجابة السؤال الثالث

أ- نفرض أن b,a أنصاف أقطار الشريحتين وأن $b>a$ و نفرض أن الشحنة Q الموجودة على الشريحة الخارجية توزعت إلى $Q-Q'$ على السطح الخارجي لها وبالتالي تكون الشحنة على السطح الداخلي لها هي Q' 0 بما أن الشحنة الكلية داخل الموصل الذي نصف قطره b تنعدم إذن تتكون بالتأثير شحنة $-Q'$ على السطح الخارجي للشريحة الداخلية للموصل 0 الجهد الناشئ V عند أي نقطة داخل الشريحة الصغرى يتكون من جهدين ، جهد ناشئ عن الشحنة $-Q'$ ويساوي $-Q'/a$ وجهد ناشئ عن الشحنة Q ومقداره Q/b ، أي أن

$$V = -\frac{Q'}{a} + \frac{Q}{b}$$

ولكن الكرة الداخلية متصلة بالأرض أي أن الجهد عند أي نقطة داخلها ينعدم أي أن $V=0$

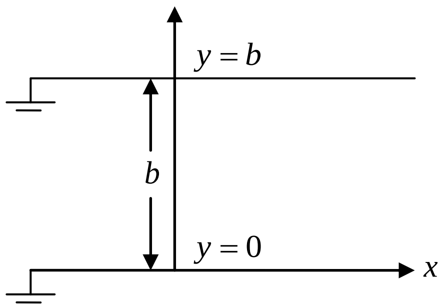


$$-\frac{Q'}{a}+\frac{Q}{b}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \therefore Q'=\frac{a}{b}Q$$

نفرض أن V' الجهد عند أي نقطة على سطح الكرة الخارجية إذن

$$V'=\frac{Q-Q'}{b}=Q\cdot\frac{b-a}{b^2}$$

ب- باستخدام الإحداثيات الكارتيزية وبما أن



$$\nabla^2 V=0 \tag{1}$$

وحـــيث أن الجهد يعتمد على المتغيرين x,y فقط

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

نفرض أن

$$V(x,y)=X(x)\,Y(y) \tag{3}$$

بالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \tag{4}$$

في المعادلة (4) نفرض أن

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2Y \tag{5}$$

وبالتالي نحصل على

$$\frac{d^2X}{dx^2}=n^2X \tag{6}$$

الحل العام للمعادلة (5) على الصورة

$$Y=A\sin ny+B\cos ny \tag{7}$$

والحل العام للمعادلة (6) على الصورة

$$X=Ce^{nx}+De^{-nx} \tag{8}$$

حيث أن الشروط الابتدائية هي $V=0 \quad at \quad y=0, y=b$ ، $V=0 \quad at \quad x=\pm\infty$ و $V=0$ وباستخدام الشرط الحدي الأول نجد أن

$$B=0 \quad , \quad n=k\pi/b$$

حيث k عدد صحيح 0 وبذلك يكون الحل العام لمعادلة لابلاس على الصورة

$$V_1=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\,e^{\frac{k\pi}{b}x}\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad -\infty<x<0$$

$$V_2=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\,e^{-\frac{k\pi}{b}x}\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad 0<x<\infty$$