

السؤال الأول:

أ- أوجد قيمة الثابت c الذي يجعل الدالة الآتية دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \frac{c}{4+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

ومن ثم أوجد $P(-2 \leq X \leq 2)$

الحل:

دالة كثافة احتمالية لا بد من تحقق الشرط لكي تكون $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{c}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{c\pi}{2} = 1 \quad \therefore c = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

وعليه فإن الدالة:

$$f(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

تمثل دالة كثافة احتمالية، ولحساب الاحتمال المطلوب نوجد:

$$\begin{aligned} \therefore P(-2 \leq X \leq 2) &= \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{x}{2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{2}{\pi} [\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0] = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ب- إذا أُلقيت قطعة نقدية 4 مرات فأوجد احتمال كل مما يأتي:
(i) ظهور الصورة مرتين.

(ii) ظهور الصورة أكثر من مرتين

الحل:

X إذا اعتبرنا أن المتغير يخضع لتوزيع ذي الحدين X هو عدد مرات الصور التي تظهر، فإن
وعليه فإن احتمال ظهور الصورة مرتين يعطى بالصورة: $n = 4$ ، $p = \frac{1}{2}$ بالبارامترات

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 0.75$$

احتمال ظهور الصورة أكثر من مرتين: (ii)

$$P(3) + P(4) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

السؤال الثاني:

أ- إحسب الوسط الحسابي و التباين والانحراف المعياري للبيانات التالية:

800 840 860 830 920

الحل: انظر الكتاب المقرر صـ 20

ب- إذا كانت الحوادث B_1, B_2, \dots, B_n تمثل تجزئياً لفضاء العينة S وكان A
أحد حوادث فضاء العينة S أثبت أن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

الحل:

$$\because A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i) ,$$

$$\because (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = A \cap \Phi = \Phi \quad \forall i \neq j$$

. $i \neq j$ كلها حوادث متنافية لكل $(A \cap B_i), (A \cap B_j)$ أي أن الحوادث

$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

وباستخدام قاعدة ضرب الاحتمالات فإن :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i).$$

مع أطيب التمنيات

د/أحمد عبدالخالق محمد - كلية العلوم - قسم
الرياضيات