نموذج إجابة (ثلث ورقة)

أستاذ المادة: د. محمد معبد بيومي خضر

التاريخ: 9/ 1/ 2013م

جامعة بنها ـ كلية العلوم ـ قسم الرياضيـــــات

المـــادة: تفاضل وتكامل متقدم
الزمــن: 40 دقيقة

دور يناير 2013

الفرقة: ثانية عام فيزياء

كلية التربية

جامعة بنــها
كلية التربيـــة
قسـم الرياضيـــات

الورقة الثالثة

المـــادة: تفاضل وتكامل متقدم
الزمــن: 40 دقيـقـة
الفرقـــة: الثانية فيزياء
التاريخ: 9-1-2013

أجب عن الأسئلـــة الآتيـــة

السؤال الأول: (أجب عن ثلاثة فقط)

(أ) احسب قيمة التكاملات التالية $[2]\ \int_{0}^{1}\int_{3y}^{3} e^{x^2}dxdy \qquad [1]\ \int_{1}^{2}\int_{0}^{2-x} \frac{dydx}{(x-y)^2}$

(ب) احسب قيمة التكامل $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ حيث R هي المنطقة في المستوي xy المحصورة بين الدائرتين $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=4$.

(جـ) احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات $y=x$, $y=x^2$

(د) أوجد قيمة التكامل $\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^2}$ علي الحجم V المحدود بالمستويات $x=y=z=0$, $x+y+z=1$

السؤال الثاني: (أجب عن ثلاثة فقط)

(أ) أوجد كل المشتقات الثانية للدالة $z=x^2\sin(y)+y^2\cos(x)$

(ب) أوجد z_u, z_v إذا كانت $z=x^y$, $y=u^2-v^2$, $x=u^2+v^2$

(جـ) أوجد نقط النهايات العظمي والصغري للدالة $f(x,y)=2x^3-(x-y)^2-6y$

(د) أوجد مفكوك تايلور للدالة $f(x,y)=e^{xy}$ حول النقطة $(1,2)$.

انتهت الأسئلة،

متمنياً للجميع التوفيق والنجاح،

د. محمد معبد

إجابة السؤال الأول

(أ)

$$[1]\quad \int_1^2\int_0^{2-x}\frac{dydx}{(x-y)^2}=\int_1^2\int_0^{2-x}(x-y)^{-2}dydx=\int_1^2[(x-y)^{-1}]_0^{2-x}dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x+1)-\ln(x)\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln(3)-\ln(2)-\left(\frac{1}{2}\ln(2)-\ln(1)\right)=\frac{1}{2}\ln(3)-\frac{3}{2}\ln(2).$$

سوف نغير حدود التكامل وذلك بأخذ شريحة رأسية نجد أن حدود التكامل هي

$$x: 0\rightarrow 3,\quad y: 0\rightarrow x/3$$

$$[2]\ \int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}dxdy=\int_0^3\int_0^{x/3}e^{x^2}dydx=\int_0^3[ye^{x^2}]_0^{x/3}dx=\frac{1}{3}\int_0^3 xe^{x^2}dx=\frac{1}{6}[e^{x^2}]_0^3=\frac{1}{6}[e^9-1]$$

(ب) نرسم منطقة التكامل في الإحداثيات القطبية حيث: $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ **.**

نجد أن المساحة المطلوبة محصورة بين الدائرتين $r=2, r=3$ **، ونلاحظ أن المنطقة في الربع الأول وتكون حدود التكامل هي** $r: 2\rightarrow 3,\ \theta: 0\rightarrow \pi/2$

$$\iint_R\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=4\int_0^{\pi/2}\int_2^3 r^2drd\theta=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_2^3 r^2dr=\frac{38}{3}\pi$$

(جـ) بحل المعادلتين للحصول علي حدود التكامل كما يلي

$$x^2-x=0\quad\rightarrow\quad x(x-1)=0\quad\rightarrow\quad x=0,\ x=1$$

وبالتالي تكون المساحة A

$$A=\int_0^1\int_{x^2}^{x}dydx=\int_0^1[y]_{x^2}^{x}dx=\int_0^1[x-x^2]dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

إجابة السؤال الثاني

(أ) نوجد المشتقات الأولي ثم الثانية كما يلي:

$$z_x=2x\sin(y)-y^2\sin(x),\qquad z_y=x^2\cos(y)+2y\cos(x)$$

$$z_{xx}=2\sin(y)-y^2\cos(x),\qquad z_{yy}=-x^2\sin(y)+2\cos(x)$$

$$z_{xy}=2x\cos(y)-2y\sin(x),\qquad z_{yx}=2x\cos(y)-2y\sin(x)$$

(ب) باستخدام القانون $x=u^2+v^2,\ \ y=u^2-v^2,\ \ z=x^y$

$$z_u=z_x x_u+z_y y_u=yx^{y-1}(2u)+x^y\ln(x)(2u)$$
$$z_v=z_x x_v+z_y y_v=yx^{y-1}(2v)+x^y\ln(x)(-2v)$$

(جـ) لإيجاد نقط النهايات العظمي والصغري للدالة $f(x,y)=2x^3-(x-y)^2-6y$

نوجد المشتقات الأولي ونضع كل منهما بصفر

$$f_x=6x^2-2(x-y)=0,\ \ f_y=2(x-y)-6=0$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل علي $x_1=1,\ \ x_2=-1$ **وبالتعويض في المعادلتين السابقتين**

نجد أن $y_1=-2,\ \ y_2=-4$ **أي أن النقط الحرجة هي** $(1,-2),\ \ (-1,-4)$

نوجد المشتقات الثانية $f_{xx}=12x\text{-}2,\ \ f_{yy}=-2,\ \ f_{xy}=2$

عند النقط الأولي $(1,-2)$ **نجد أن**

$$f_{xx}(1,-2)=10>0,\quad [f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2](1,-2)=-24<0$$

أي هذه النقطة $(1,-2)$ **هي Saddle point.**

عند النقط الثانية $(-1,-4)$ **نجد أن**

$$f_{xx}(-1,-4)=-14<0,\quad [f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2](1,-2)=24>0$$

أي هذه النقطة $(-1,-4)$ **هي نقطة نهاية عظمي للدالة وقيمتها** $f_{max}=13$**.**

(د) نوجد المشقات الأولي والثانية والثالثة للدالة $f(x,y)=e^{xy}$ **ونعوض بالنقطة (1,2) بها**

نجد أن

$$f(x,y)=e^{xy} \rightarrow f(1,2)=e^2$$
$$f_x(x,y)=ye^{xy} \rightarrow f_x(1,2)=2e^2$$
$$f_y(x,y)=xe^{xy} \rightarrow f_y(1,2)=e^2$$
$$f_{xx}(x,y)=y^2e^{xy} \rightarrow f_{xx}(1,2)=4e^2$$
$$f_{yy}(x,y)=x^2e^{xy} \rightarrow f_{yy}(1,2)=e^2$$
$$f_{xy}(x,y)=xye^{xy} \rightarrow f_{xy}(1,2)=2e^2$$

سوف نعوض في مفكوك تايلور

$$f(x,y)=f(1,2)+\frac{1}{1!}(f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2))$$
$$+\frac{1}{2!}(f_{xx}(1,2)(x-1)^2+2f_{xy}(1,2)(x-1)(y-2)+f_{yy}(1,2)(y-2)^2)+\ldots$$
$$=e^2+2e^2(x-1)+e^2(y-2)+\frac{1}{2}(4e^2(x-1)^2+4e^2(x-1)(y-2)+e^2(y-2)^2)+\ldots$$