إجابة اختبار مادة استاتيكا (2) للفرقة الثانيه كلية التربية شعبة رياضه عام العام الدراسى 2013/2012 الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار 12 /2013/1 (ورقه امتحانيه كامله)

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ - المشتقة الاتجاهية هي $\frac{d\phi}{dl}=\nabla\phi\cdot\hat{\underline{t}}$

حيث $\hat{\underline{t}}$ متجه الوحدة في اتجاه $\underline{A}$

$$\therefore\hat{\underline{t}}=\frac{\underline{A}}{|\underline{A}|}=\frac{3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k}}{\sqrt{9+1+9}}=\frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k})$$

$$\frac{d\phi}{dl}=\left[(2xy+z^2)\underline{i}+(2yz+x^2)\underline{j}+(2xz+y^2)\underline{k}\right]\times\frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k})$$

$$\frac{d\phi}{dl}=\frac{1}{\sqrt{19}}\left[6xy+3z^2+2yz+x^2-6xz+3y^2\right]$$

ب- يكون من المناسب في هذه المسأله استخدام الإحداثيات الاسطوانية وهو ما ينتج أيضاً من الإحداثيات الكروية عندما $\theta=\pi/2$ وعليه فإن المساحة المستخدمة S يكون لها الفترات $0<r<2$ ، $\theta=\pi/2$ ، $0<\phi<2\pi$ 0 وهذا يؤدي فعلاً إلى الإحداثيات الاسطوانية إذ أن

$$\rho=r\sin\theta=r\,,\,z=r\cos\theta=0\,,\,0<\rho<2\,,\,0<\phi<2\pi$$

ويكون عنصر المساحة والعمود هما

$$da=\rho\,d\rho\,d\phi\quad,\quad\hat{n}=\underline{k}$$

$$\int_S\underline{F}\cdot\hat{n}\,da=\int_0^2\int_0^{2\pi}(5y\underline{i}-xz\,\underline{j}+3x\underline{k})\cdot\underline{k}\,\rho\,d\rho\,d\phi=\int_0^2\int_0^{2\pi}3\rho^2\cos\phi\,d\rho\,d\phi=\int_0^2 3\rho^2d\rho\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi=0$$

إجابة السؤال الثاني

أ- في هذه الإحداثيات يكون $u_3=\phi$ ، $u_2=\theta$ ، $u_1=r$

$$x=r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y=r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z=r\cos\theta$$

$$\therefore\underline{r}=r\sin\theta\cos\phi\underline{i}+r\sin\theta\sin\phi\,\underline{j}+r\cos\theta\underline{k}$$

$$h_1=\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial r}\right|=\left|\sin\theta\cos\phi\underline{i}+\sin\theta\sin\phi\,\underline{j}+\cos\theta\underline{k}\right|=\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta}=1$$

وبالمثل نجد أن $h_3=r\sin\theta\quad,\quad h_2=r$

ومتجهات الوحدة هي

$$\underline{e}_r=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\underline{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\phi\underline{i}+\sin\theta\sin\phi\,\underline{j}+\cos\theta\underline{k}$$

$$\underline{e}_\theta=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\theta}=\cos\theta\cos\phi\underline{i}+\cos\theta\sin\phi\,\underline{j}-\sin\theta\underline{k}$$

$$\underline{e}_\phi=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\phi}=-\sin\phi\underline{i}+\cos\phi\,\underline{j}$$

نلاحظ أن $\underline{e}_1\cdot\underline{e}_2=0$ $\quad\underline{e}_3\cdot\underline{e}_1=0\quad$ $\underline{e}_2\cdot\underline{e}_3=0$ أي أن نظام الإحداثيات الكرويه متعامد 0

ب- ψ دالة في الإحداثيات الكروية r,θ,ϕ فيكون

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\underline{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\underline{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\underline{e}_\phi$$

$$=2r\cos\theta\sin n\phi\underline{e}_r-r^2\sin\theta\sin n\phi\underline{e}_\theta+n\,r\cot\theta\cos n\phi\underline{e}_\phi$$

إجابة السؤال الثالث

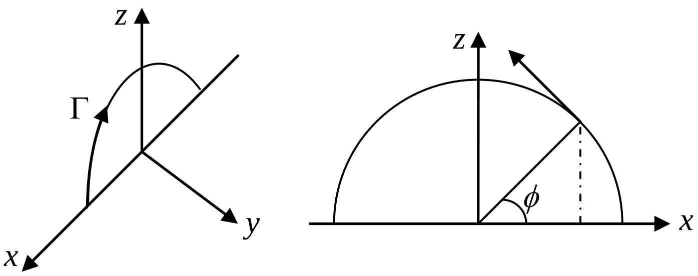
أ-

$$\nabla r^n = \nabla\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right\}^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$= \underline{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{n/2} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{n/2} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$= \frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(2x\underline{i}+2y\underline{j}+2z\underline{k}) = n(x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})(x^2+y^2+z^2)^{(n-2)/2} = nr^{n-2}\underline{r}$$

ب-



إذا أخذنا الإحداثيات القطبية في المستوى xz نجد أن للمسار Γ $R=3\,,0<\phi<\pi\,,\,x=3\cos\phi\,,\,y=0\,,\,z=3\sin\phi$
وأن متجه الوحدة المماس للمسار والعنصر الطولي هما

$$\hat{t} = -\sin\phi\underline{i} + \cos\phi\underline{k} \quad , \quad dl = 3d\phi$$

$$\int_\Gamma \underline{F}\cdot\hat{t}\,dl = \int_0^\pi(-9\cos\phi\sin\phi\,\underline{j}+9\cos\phi\underline{k})\cdot\hat{t}\,dl$$

$$= 27\int_0^\pi\cos^2\phi\,d\phi = \frac{27}{2}\int_0^\pi(\cos2\phi+1)\,d\phi \;= 27\left[\phi+\frac{1}{2}\sin2\phi\right]_0^\pi = \frac{27}{2}\pi$$

إجابة السؤال الرابع

أ-

$$\psi = (x^2+y^2+z^2)\,e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = r^2\,e^{-r}$$

ولكن $\nabla f(r) = f'(r)\underline{r}/r$

$$\therefore \nabla(r^2e^{-r}) = \left(2re^{-r} - r^2e^{-r}\right)\frac{\underline{r}}{r} = (2-r)e^{-r}\,\underline{r}$$

ب- باستخدام الإحداثيات الكروية نعلم أن الحجم V يغطى بالفترات الآتية

$$0<r<2\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2},\ 0<\phi<\frac{\pi}{2}$$

حيث

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ ,\ y = r\sin\theta\sin\phi \ ,\ z = r\cos\theta$$

والعنصر الحجمي هو

$$dv = r^2\sin\theta\,drd\theta\,d\phi$$

$$\int_V f dv = \int_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left[r^2\sin\theta\cos\phi\cos\theta + 3r\sin\theta\sin\phi - r\cos\theta\right]\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^2\int_0^{\pi/2}\left[r^2\sin^2\theta\cos\theta + 3r\sin^2\theta - \frac{\pi}{2}r\sin\theta\cos\theta\right]r^2drd\theta$$

$$= \int_0^2 dr\left[\frac{r^4}{3}\sin^3\theta + \frac{3r^2}{2}(\theta - \frac{\sin2\theta}{2}) - \frac{\pi r^3}{4}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \int_0^2 dr\left(\frac{r^4}{3} + \frac{3\pi r^3}{4} - \frac{\pi r^3}{4}\right) = \left[\frac{r^5}{15} + \frac{\pi r^4}{8}\right]_0^2 = \frac{32}{15} + 2\pi$$

إجابة السؤال الخامس

أ- من نظرية جاوس للانتشار

$$\oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds} = \int_v (\nabla\cdot\underline{F})\,dv$$

حيث V هو حجم المكعب ، $\underline{F}$ دالة في x, y, z أي أن

$$\nabla\cdot\underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4z - y$$

$$\therefore \oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(4z-y)dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2z^2-yz)_0^1 dy\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}$$

ب- الحدود c للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل لذلك

$$x=\cos\theta \quad , \quad y=\sin\theta \quad , \quad z=0 \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\oint_c \underline{A}\cdot\underline{dr} = \oint_c \{(2x-y)dx - yz^2dy - y^2zdz\} = \int_0^{2\pi}(2\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)d\theta = \pi \quad (1)$$

أيضاً

$$\nabla\wedge\underline{A} = \underline{k}$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_S (\nabla\wedge\underline{A})\cdot\underline{ds} = \int_S \underline{k}\cdot\underline{n}\,ds = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$$

حيث $\underline{k}\cdot\underline{n}\,ds = dxdy$ على الدائرة $x^2+y^2=1$

$$\therefore \int_S (\nabla\wedge\underline{A})\cdot\underline{ds} = 4\int_0^1\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \pi \quad (2)$$

من (1),(2) تكون نظرية أستوك قد تحققت 0
