كلية تربية بنها | ثالثة رياضيات تعليم أساسي | الفصل الثانى2013/2014

قسم الرياضيات | تطبيقات رياضية(٤)M ٠٣٢٤ | الزمن : ساعتان

السبت:٢٠١٤/٦/٧

أجب عن الأسئلة التالية موضحا اجابتك بالرسم(الدرجة الكلية للمادة ١٤٠ درجة موزعة بالتساوى):-

السؤال الأول

أ - اذكر ماتعرفه عن :- مركبات السرعة والعجلة فى الأحداثيات الذاتية- السيكلويد- المعادلات البارامترية للسيكلويد. (٨درجات)

ب -ترك جسيم كتلته m لينزلق على سيكلويد $S = 4a\sin\psi$ مبتدأ من السكون من موضع يبعد عن رأس السيكلويد مسافة bمقاسة على السيكلويد نفسه . أثبت أن سرعة الجسيم عند مروره برأس السيكلويد تساوى $b\sqrt{\frac{g}{4a}}$

وأن ضغطه عندئذ هو ($mg(1+\frac{b^2}{16a^2}$ حيث a نصف قطر الدائرة التى يتولد من حركتها السيكلويد . (٢٧ درجة)

السؤال الثانى

أ - اذكر ماتعرفه عن :- التصادم الغير مباشر – قانون نيوتن التجريبى للأرتداد – طاقة الحركة المفقوده بالتصادم المرن- مبدأ ثبوت كمية الحركة. (10 درجات)

ب -أصطدمت كرة كتلتها m_1 اصطداما مائلا بكرة أخرى ساكنه كتلتها m_2 . اذا كانت $m_1 = em_2$ حيث e معامل الأرتداد فأثبت أن اتجاهى حركة الكرتين بعد التصادم يكونان متعامدين . (٢٥ درجة)

السؤال الثالث

أ - اذكر ماتعرفه عن كل من :- المعادلة التفاضلية للمسار المركزى (قانون القوة)- قانون السرعة – القبا – السرعة فى دائرة – السرعة المساحية. (١٠ درجات)

يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها λu^3 لوحدة الكتل فاذا قذفت النقطة المادية بسرعة ابتدائية $\frac{\sqrt{\lambda}}{a}$

فى اتجاه يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع البعد الأبتدائى a من مركز الجذب . أثبت أن معادلة المسار هى $r = ae^{\theta}$. (٢٥ درجة)

السؤال الرابع

أ - اذكر ماتعرفه عن :- الجسم المتماسك – نظرية حركة الجسم المتماسك حول محور ثابت . (٥ درجات)

ب -قرص دائرى منتظم نصف قطره a يدور فى مستوى رأسى حول محور عمودى على مستواه ويمر باحدى نقاط محيطه . فاذا بدأ القرص الحركة من سكون عندما كان مركز ثقلة يقع رأسيا أعلى نقطة التعليق فأوجد كلا من سرعة مركز الثقل ورد الفعل عند محور التعليق عندما :-

١ -يكون مركز الثقل فى المستوى الأفقى المار بنقطة التعليق .

٢ -يكون مركز الثقل أسفل نقطة التعليق. (٣٠ درجة)

كلية تربية بنها	**ثالثة رياضيات تعليم أساسي**	**الفصل الثانى2013/2014**
قسم الرياضيات	**اجابة تطبيقات رياضية(٤)M ٠٣٢٤**	**الزمن : ساعتان**
		السبت:٢٠١٤/٦/٧

اجابة السؤال الأول

أ- **تعريف**

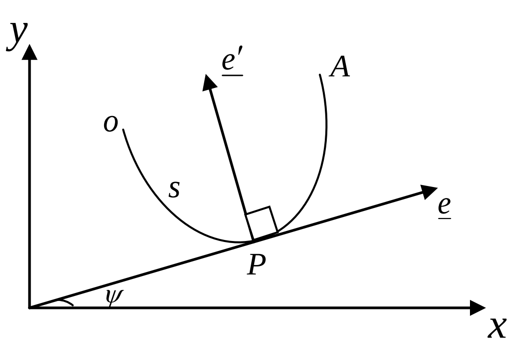
الســــــيكلويد هو المنحنى الذي ترسمه نقطة على محيط دائرة عندما تتدحرج هذه الدائرة دون انزلاق على مســـتقيم معلوم ويســـمى الخط المســـتقيم الذي تتدحرج عليه الدائرة بالقاعدة والنقطة الثابتة على محيط الدائرة بالنقطة الراسمة .

$$\therefore x = a(\theta - \sin\theta)$$

$$\therefore y = a(1 - \cos\theta)$$

المعادلتين تســــميان المعادلتـــــــان البارامتريتان للسيكلويد واضح أن θ تبدأ من الصفر

مركبات السرعة والعجلة في الإحداثيات الذاتية :-



نفرض أن oA منحنى مستوي أملس وأن هناك نقطة مادية تتحرك على هذا المنحنى بحيث أن موضعه عندأي لحظة زمنية t هو P حيث $oP = s$ والممـــــاس للمنحنى عند P يصنع مع الأفقي زاوية ψ

ليكن $\underline{e}, \underline{e}'$ هما متجهي الوحدة في هذين الاتجاهين. واضح أن اتجاهي $\underline{e}, \underline{e}'$ مرتبطان بحركة النقطة P ولذلك فهما متغيران في الاتجاه لذلك من الأفضل حسابهما بدلالة متجهي الوحدة الثابتين $\underline{i}, \underline{j}$.حيث

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = \dot{\psi}\,\underline{e}' \qquad and \qquad \frac{d\underline{e}'}{dt} = -\dot{\psi}\,\underline{e}$$

و حيث أن السرعة تكون في اتجاه المماس

$$\therefore \underline{v} = \frac{ds}{dt}\underline{e}$$

وتصبح العجلة

$$\underline{f} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\underline{e} + \dot{s}\,\dot{\psi}\,\underline{e}'$$

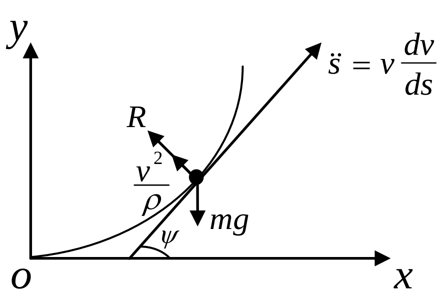
$\therefore$ العجلة المماسية $\qquad f_t = \ddot{s}$

والعجلة العمودية هي

$$f_n = \dot{s}\,\dot{\psi} = \dot{s}\,\frac{d\psi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\dot{s}^2$$

ويكون اتجاهها للداخل .

ب-الحل:-



معادلة الحركة في اتجاه المماس هي

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

ونصف قطر التقوس هو

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi \qquad (2)$$

وحيث أن $s = 4a\sin\psi$ وعلى ذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a} s \qquad (3)$$

وهي تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$$\tau = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{4a/g}$$

والحل العام للمعادلة (3) هو

$$s = A\cos(\omega t + \varepsilon) \text{ ،} \quad \omega = \sqrt{g/4a} \qquad (4)$$

لتعيين السعة A وزاوية الطور الابتدائية ε نستخدم الشــروط الابتدائية للحركة $s = b, t = 0$

$$\therefore b = A\cos(0 + \varepsilon) \qquad (5)$$

بتفاضل المعادلة (4) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\dot{s} = -A\omega\sin(\omega t + \varepsilon)$$

من الشروط الابتدائية $\dot{s} = 0, t = 0$ نجد أن

$$0 = -A\omega\sin(0 + \varepsilon) \Rightarrow \therefore \varepsilon = 0 \qquad (6)$$

بالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5) نجد أن

$$b = A\cos(0) \Rightarrow \therefore A = b \qquad (7)$$

بالتعويض عن قيمة الثوابت في معادلة الحركة نحصل على

$$s = b\cos\omega t \quad \text{،} \quad \omega = \sqrt{g/4a} \qquad (8)$$

عند رأس السيكلويد $s = 0$ وعلى ذلك $\omega t = \pi / 2$

$$v = \dot{s} = b\omega\sin(\omega t) = b\sqrt{\frac{g}{4a}}\sin\frac{\pi}{2} = b\sqrt{\frac{g}{4a}} \qquad (9)$$

الزمن الذي تأخذه النقطة للوصول إلى رأس السيكلويد هو

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{4a}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{g}{a}} \qquad (10)$$

معادلة الحركة في الاتجاه العمودي هي

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi$$

$$\therefore R = \frac{mv^2}{\rho} + mg\cos\psi \quad ، \quad \rho = 4a\cos\psi \qquad (11)$$

وعند أسفل نقطة $\psi = 0$ ، $\rho = 4a$ ، $v^2 = \frac{b^2 g}{4a}$

$$\therefore R = \frac{mb^2 g}{16a^2} + mg = mg\left(1 + \frac{b^2}{16a^2}\right) \qquad (12)$$

وهو المطلوب .

اجابة السؤال الثانى

أ-التصادم غير المباشر أو المائل :

يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كلاهما مائلاً على خط المركزين بزاوية معينة. عند تصادم كرتان ملساوتين فلا توجد قوة عمودية على خط التصادم وبذلك لا تتغير السرعات في الاتجاه الرأسي

$$u_1 \sin\alpha = v_1 \sin\theta \qquad , \qquad u_2 \sin\beta = v_2 \sin\phi$$

قانون نيوتن التجريبى :

وينص على إنه إذا تصادم جسيمان فإن

السرعة النسبية لهما بعد التصادم = $-e$ (السرعة النسبية قبل التصادم)

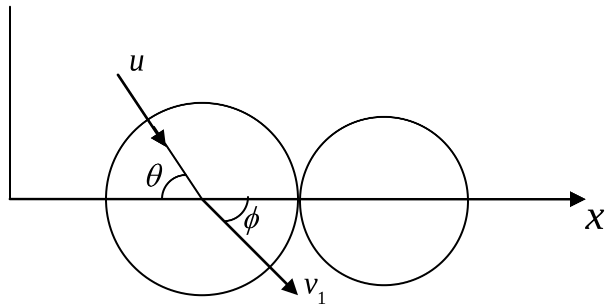
حيث e ثابت يسمى معامل الارتداد ويساوي واحد في الأجسام التامة المرونة وأقل من الواحد في الأجسام المرنة يساوي صفر في الأجسام عديمة المرنة ، ويطبق هذا القانون دائماً في اتجاه المركزين

-طاقة الحركة المفقودة بالتصادم

$$\therefore E = \frac{m_1 m_2 (1 - e^2)}{2(m_1 + m_2)} (u_2 - u_1)^2$$

حيث θ زاوية ميل u على خط المركزين ، e معامل الارتداد .

ب-الحـــــل :



بما أن الكرة الثانية كانت ساكنة قبل التصادم لذلك فإنها سوف تتحرك بعد التصادم في اتجاه خط المركزين.

نفرض أن v_1 سرعة الكرة الأولى بعد التصادم وتميل بزاوية φ على خط المركزين والثانية تتحرك بسرعة v_2

$$v_1 \sin\phi = u \sin\theta \qquad (1)$$

$$mu\cos\theta = mv_1\cos\phi + M\,v_2 \qquad (2)$$

$$v_1\cos\phi - v_2 = -e(u\cos\theta) \qquad (3)$$

بالتعويض عن $m_1 = em_2$ **فى** المعادلة (2)

$$eu\cos\theta = ev_1\cos\varphi + v_2 \qquad (2)''$$

من المعادلة (3)

بجمع المعادلتين ”(2)”,(3)

أى أن سرعة الأولى عمودية على خط المركزين أى عمودية على سرعة الكرة الثانية.

أى أن اتجاهى حركة الكرتين بعد التصادم متعامدين .

اجابة السؤال الثالث

أ-المعادلة التفاضلية للمسار المركزى

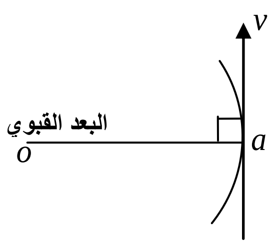
$$f = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

قانون السرعة

$$\therefore v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

القبا والأبعاد القبوية

إذا تحركت نقطة مادية في مسار مركزي وكانت في موضع اتجاه حركتها عمودي على نصف القطر المتجه سمي هذا الموضع بالقبا أو الآبس والمسافة بين هذا الموضع ومركز الجذب تسمى البعد القبوي .



السرعة في دائرة

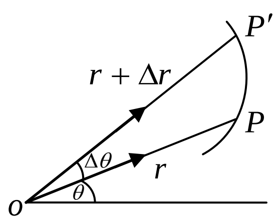
السرعة في دائرة تحت تأثير نفس القوة يعني هذا أنها السرعة التي تتحرك بها النقطة في دائرة تحت تأثير نفس القوة ، فإذا كانت القوة $f(r)$ وكانت النقطة المادية قد قذفت من موضع على بعد a من مركز الجذب ، حيث أن النقطة تتحرك في دائرة فإن عجلاتها تكون v^2/a نحو المركز وتصبح معادلة الحركة على الصورة

$$m\frac{v_c^2}{a} = mf(r) \Rightarrow \therefore v_c^2 = af(a)$$

وإذا كان نصف قطر الدائرة يساوي r

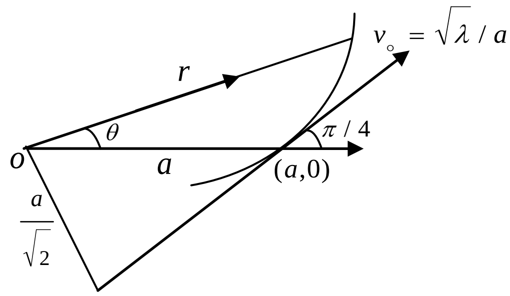
$$\therefore v_c^2 = rf(r)$$

السرعة المساحية



هي معدل اكتساح نصف قطر المتجه للمساحة في المستوى.وتساوى نصف الثابت h

ب-الحــل



نوجد أولا قيمة الثابت h

$$h = v_\circ p_\circ = \frac{\sqrt{\lambda}}{a} a \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\lambda/2} \qquad (1)$$

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي

$$f = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u^3 \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u$$

بتكامل المعادلة السابقة بالنسبة إلى u نحصل على

$$h^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{u^2}{2}\right] = \frac{\lambda}{2}u^2 + c$$

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \lambda u^2 + c_1 \Rightarrow \therefore v^2 = \lambda u^2 + c_1$$

حيث c, c_1 ثوابت التكامل ، عندما $v\sqrt{\lambda}/a, u = 1/a$ فإن $c_1 = 0$.

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \lambda u^2$$

بالتعويض عن قيمة h نجد أن

$$\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda u^2 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{\lambda}{2}u^2$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta}=\pm u$$

ولتعيين نوع الإشـــارة نجد أنه عند بدايـــة الحركـــة تزداد r بزيادة θ أي تقل u بزيادة θ ولذلك نختار الإشارة السالبة

$$\therefore \frac{du}{d\theta}=-u \Rightarrow \int \frac{du}{u}=-\int d\theta + c_2$$

عندما $r=a$ ، $\theta=0$ فإن $c_2=\ln\frac{1}{a}$

$$\therefore \ln\frac{a}{r}=-\theta \Rightarrow \therefore \ln\frac{r}{a}=\theta \Rightarrow \therefore r=ae^{\theta}$$

<u>اجابة السؤال الرابع</u>

<u>أ-الجسم الجاسئ</u>

إذا ظلت المسافة بين أي نقطتين في الجسم ثابتة أثناء الحركة مهما كانت القوى المؤثرة عليه قيل أن الجسم متماسك أو جاسئ

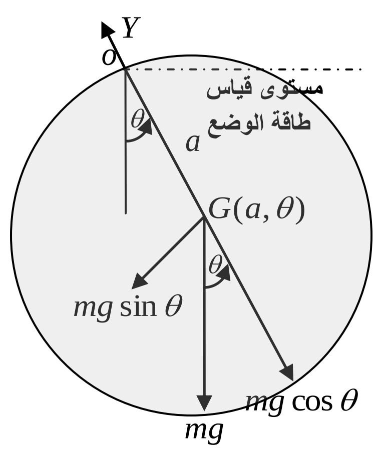
<u>نظرية حركة الجسم حول محور ثابت</u>

إذا تحرك جسم حول محور ثابت ، فإن الحركة تتعين تعييناً تاماً بواسطة النظرية التالية :

" معدل التغير في عزم كمية الحركة بالنسبة للزمن حول محور الدوران يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية حول نفس المحور".

<u>ب-الحـــل :</u>

الشروط الاولية هي



$$\dot{\theta}=0 \quad at \quad \theta=\pi$$

مبدأثبوت الطاقة

$$T + V = T_\circ + V_\circ$$

$$T_\circ = 0$$

$$V_\circ = mga$$

$$V = -mga\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2} I_\circ \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{2} ma^2 + ma^2 \right) = \frac{3}{4} ma^2 \dot{\theta}^2$$

$$\therefore\ \frac{3}{4} ma^2 \dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = mga\cos\theta$$

$$ma\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} mg(1+\cos\theta) \qquad (1)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى t نجد أن

$$ma \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{4}{3} mg \sin\theta\, \dot{\theta}$$

$$\therefore ma \cdot \ddot{\theta} = -\frac{2}{3} mg \sin\theta \qquad (2)$$

معادلات حركة مركز الثقل G

$$Y = mg\cos\theta + ma\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} mg(1+\cos\theta) + mg\cos\theta$$

$$Y = \frac{7}{3} mg\cos\theta + \frac{4}{3} mg \qquad (3)$$

$$X = mg\sin\theta + ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta - \frac{2}{3} mg\sin\theta$$

$$X = \frac{1}{3} mg\sin\theta \qquad (4)$$

سرعة مركز الثقل هي

$$v = a\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4a}{3} g(1+\cos\theta)}$$

أ- عندما يكون مركز الثقل في المستوى الأفقي المار بنقطة التعليق

$$\therefore \theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{3} mg \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{4}{3} mg$$

$$\therefore R_1 = \frac{\sqrt{17}}{3} mg \quad , \quad v_1 = \sqrt{\frac{4a}{3} g}$$

ب- عندما يكون مركز الثقل أسفل نقطة التعليق

$$\therefore \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{11}{3} mg$$

$$\therefore R_1 = \frac{11}{3} mg \quad , \quad v_2 = \sqrt{\frac{8a}{3} g}$$

انتهت الأجابة لمادة رياضة تطبيقية (٤)

أ.د.محمود عبد العاطى محمود قسم الرياضيات بكلية العلوم