جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيـات

الفرقة الثالثة (تربية عام- شعبة كيمياء)

الفصل الدراسي الثانــي

يوم الامتحان: السبت 7 / 6 / 2014 م

المادة : معادلات تفاضلية جزئية + دوال خاصة

أستاذ المادة : د . / خليل محمد خليل محمد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

صورة من الامتحان+ نموذج إجابته

كليـة : التربية   الفرقة الثالثـــة   التاريخ: 2014/6/7

شعبة : الكيمياء   دوال خاصة ومعادلات تفاضلية جزئية   الزمن : ساعـــة

===

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي على أن يكون السؤال الأول منهما :

1-a	أوجد قيمة التكاملات آلاتية مستخدما تعريف دالة جاما ودالة بيتا: (1)- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}(\theta)dx$ (2)- $\int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x^4} dx$
1-b	حل المعادلة التفاضلية الآتية مستخدما طريقة فروبنيوس $2x\frac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\frac{dy}{dx}+3y=0$ في صورة متسلسلة قوى x .
2-a	أثبت أن $P_5'(x)=9P_4(x)+5P_2(x)+P_0(x)$ حيث $P_n(x)$ هي كثيرة حدود لاجندر.
2-b	أوجد حل معادلة لابلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ مستخدما طريقة فصل المتغيرات.
3-a	أثبت العلاقة التكرارية الآتية $xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)=nP_n(x)$ حيث $P_n(x)$ هي كثيرة حدود لاجندر.
3-b	أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية $\frac{\partial u}{\partial x}=5\frac{\partial u}{\partial y}$

<u>تابع امتحان نظرية الزمر</u>

د./ خليل محمد

إجابة السؤال 1-a:

(1) – من تعريف دالة بيتا:

$$\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)d\theta \qquad (1)$$

وحيث أن $\beta(x,y)=\beta(y,x)$ ثم مقارنة التكامل المعطى بدلالة الدالة بيتا في (1) فإن:

$2x-1=2\ \Rightarrow x=\frac{3}{2},\ \ 2y-1=\frac{1}{2}\ \ \Rightarrow y=\frac{3}{4}$ إذن التكامل المعطى يساوى $\frac{1}{2}\beta(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$ وبما أن

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ \Rightarrow \frac{1}{2}\beta(\frac{3}{2},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{9}{4})}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\frac{3}{4})}{\frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\Gamma(\frac{1}{4})}=\frac{\frac{4\sqrt{\pi}}{5}\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

$$\because \Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma(\frac{3}{4})=\pi\cos ec(\frac{\pi}{4})\ \Rightarrow \Gamma(\frac{3}{4})=\frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{4})\sin(\frac{\pi}{4})} \qquad \therefore \frac{1}{2}\beta(\frac{3}{2},\frac{3}{4})=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{5}\pi^{\frac{3}{2}}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}$$

حيث $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

(2) -من تعريف دالة جاما :

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad x>0 \qquad (2)$$

نفرض أن

$$y=x^4\ \Rightarrow x=y^{\frac{1}{4}}\ \Rightarrow dx=\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}dy \qquad (3)$$

وبالنسبة لحدود التكامل تتغير من $x\to 0$ إلى $y\to 0$ ومن $x\to\infty$ إلى $y\to\infty$. ثم بالتعويض من (3) في التكامل المعطى نحصل على

$$\int_0^{\infty}y^{\frac{3}{8}}e^{-y}\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}dy=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}y^{-\frac{3}{8}}e^{-y}dy$$

بمقارنة التكامل السابق مع الصورة القياسية لدالة جاما في (2) نجد أن $x=\frac{5}{8}\ \Leftarrow x-1=-\frac{3}{8}$ أي مقدار التكامل يساوى دالة جاما للعدد $\frac{5}{8}$ مضروبا في $\frac{1}{4}$. إذن

$$\frac{1}{4}\int_0^{\infty}y^{-\frac{3}{8}}e^{-y}dy=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{5}{8})$$

إجابة السؤال 1-b:

بما أن $x=0$ نقطة شاذة وحيث

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)x}{2x}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x}=0$$

فإن $x=0$ نقطة شاذة منتظمة.

لذلك نفرض الحل على الصورة $y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$ نحصل على

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1},\qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty}2C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3C_n x^{n+r}=0$$
$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(2n+2r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r+3)x^{n+r}=0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر

$$C_n(n+r)(2n+2r-1)+C_{n-1}(n+r+2)=0 \qquad (4)$$

نضع $n=0$ نحصل على $\therefore C_0 r(2r-1)-C_{-1}(r+2)]=0$

حيث $C_0\neq 0,\quad C_{-1}=0$ اختيارية

$\therefore$ المعادلة الدليلية هي $r(2r-1)=0\Rightarrow r=0,\frac{1}{2}$.

من المعادلة (4) نحصل على $C_n=\dfrac{-(n+r+2)}{(n+r)(2n+2r-1)}C_{n-1};\quad n\geq 1$

بالتعويض عن جذري المعادلة الدليلية

1) $r=0$ $\qquad \therefore C_n=\dfrac{-(n+2)}{n(2n-1)}C_{n-1};\quad n\geq 1$

$$C_1=\frac{-3}{1(1)}C_0=-3C_0,\quad C_2=\frac{-4}{2(3)}C_1=\frac{(-4)(-3)}{(2)(3)}C_0=2C_0,\ C_3=\frac{-5}{(3)(5)}C_2=\frac{-2}{3}C_0,........$$

2) $r=1/2$

$$\therefore C_n=\frac{-(n+5/2)(2n-4)}{(n+1/2)(2n)}C_{n-1};\quad n\geq 1$$

$$C_1=\frac{-7}{2(3)}C_0=-\frac{7}{6}C_0,\quad C_2=-\frac{9}{4(5)}C_1=\frac{21}{40}C_0,\ C_3=-\frac{11}{18}C_0$$

حيث إن C_0 اختيارية لذلك نعتبر $C_0=1$ $\therefore$ الحل العام يكون على الصورة

$$y=A[1-3x+2x^2-\frac{2}{3}x^3+...]+B[1-\frac{7}{6}x+\frac{21}{40}x^2-\frac{11}{80}x^3+..]\sqrt{x}$$ حيث A,B ثابتان اختياريان.

إجابة السؤال 2-a:

من العلاقة التكرارية

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$$

بوضع $n=4$ نحصل على

$$P'_5(x)-P'_3(x)=9P_4(x) \qquad *$$

بوضع $n=2$ نحصل على

$$P'_3(x)-P'_1(x)=5P_2(x) \qquad **$$

بجمع المعادلتين *,** نجد أن

$$P'_5(x)-P'_1(x)=9P_4(x)+5P_2(x) \qquad ***$$

ولكن $P_1(x)=x \Rightarrow P'_1(x)=1=P_0(x)$ إذن المعادلة السابقة *** تصبح على الصورة

*** $P'_5(x)=9P_4(x)+5P_2(x)+P_0(x)$ وهو المطلوب اثباته.

إجابة السؤال 2-b:

نفرض الحل على الصورة $u(x,y)=f_1(x).f_2(y)$ وعلى ذلك فإن

$$u_{xx}=f_1''\cdot f_2, \qquad u_{yy}=f_1\cdot f_2''$$

وبالتعويض في معادلة لابلاس والقسمة على $f_1\cdot f_2$ نحصل على

$$f_1''\cdot f_2+f_1\cdot f_2''=0 \qquad \Rightarrow \frac{f_1''}{f_1}+\frac{f_2''}{f_2}=0$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x والطرف الأيمن دالة في y ولكى تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوى نفس الثابت وليكن k

$$\frac{f_1''}{f_1}=k \qquad , \qquad \frac{f_2''}{f_2}=-k$$

يكون لدينا ثلاث حالات للثابت k أي $i)k>0\,,\quad ii)k=0\,,\quad iii)k<0$

$$i)k>0 \quad \Rightarrow k=\lambda^2 \;\therefore\; f_1''-\lambda^2 f_1=0\,,\, f_2''+\lambda^2 f_2=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1=A_1e^{\lambda x}+B_1e^{-\lambda x}, \qquad f_2=A_2\cos(\lambda y)+B_2\sin(\lambda y)$$

وبذلك يكون الحل العام

$$u(x,y)=(A_1e^{\lambda x}+B_1e^{-\lambda x})(A_2\cos(\lambda y)+B_2\sin(\lambda y))$$

$$ii)k=0 \quad \Rightarrow \quad f_1''=0\,, \quad f_2''=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1=A_1x+B_1, \qquad f_2=A_2y+B_2$$

وبذلك يكون الحل العام

$$u(x,y)=(A_1x+B_1)(A_2y+B_2)$$

$$i) k<0 \quad \Rightarrow k=-\alpha^2 \;\therefore\; f_1''+\alpha^2 f_1=0 \;,\; f_2''-\alpha^2 f_2=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1=A_1\cos(\alpha x)+B_1\sin(\alpha x), \qquad f_2=A_2e^{\alpha y}+B_2e^{-\alpha y}$$

وبذلك يكون الحل العام

$$u(x,y)=(A_1\cos(\alpha x)+B_1\sin(\alpha x))(A_2e^{\alpha y}+B_2e^{-\alpha y})$$

إجابة السؤال 3-a :

كثيرات حدود لاجندر تعرف من الدالة المولدة من

$$(1-2hx+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x) \qquad (1)$$

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة للمتغير x نحصل على

$$-\frac{1}{2}(1-2hx+h^2)^{-\frac{3}{2}}(-2h)=\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x) \qquad (2)$$

أي أن

$$h(1-2hx+h^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x) \qquad (3)$$

بضرب طرفي المعادلة (3) في $(x-h)$ نحصل على

$$\therefore h(x-h)(1-2hx+h^2)^{-\frac{3}{2}}=(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x) \qquad (4)$$

وبما أن

$$(x-h)(1-2hx+h^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1}P_n(x)$$

بالتعويض فى المعادلة (4) نجد أن

$$h\sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1}P_n(x)=(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x)$$

بمساواة معاملات h^n فى كل من طرفى المعادلة السابقة نحصل على

$$nP_n(x)=xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)$$

إذن

$$xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)=nP_n(x)$$

إجابة السؤال3-b:

نفرض أن الحل يمكن وضعه على الصورة $u(x,y)=f_1(x).f_2(y)$ ومن ذلك نجد أن

$$u_x=f_1'\cdot f_2, \qquad u_y=f_1\cdot f_2'$$

وبالتعويض في المعادلة والقسمة على $f_1\cdot f_2$ نحصل على

$$f_1' \cdot f_2 = 5 f_1 \cdot f_2' \qquad \Rightarrow \frac{f_1''}{f_1} = 5\frac{f_2''}{f_2} = k$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x والطرف الأيمن دالة في y ولكى تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوى نفس الثابت وليكن k

$$\frac{f_1''}{5f_1} = k \qquad , \qquad \frac{f_2''}{f_2} = -k$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1 = Ae^{5kx}, \qquad f_2 = Be^{ky}$$

وبذلك يكون الحل العام $u(x,y) = Ce^{k(5x+y)}$

****