كلية التربية

الفرقة الثالثة رياضيات لائحة قديمة

الفصل الدراسي الاول

٢٠١٤ـ٢٠١٥

تاريخ الامتحان: ٢٠١٤/١٢/٢٧

نموذج اجابة نصف ورقة

المادة: ديناميكا تحليلية

أستاذ المادة : د / أحمد مصطفي عبدالباقي

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم ببنها

نموذج الاجابة

السؤال الاول:

(أ)

* إحداثيات العموم: هي تلك الإحداثيات المستقلة واللازمة والكافية لتعيين موضع المجموعة تعييناً فريداً، وإذا كان عدد هذه الإحداثيات هو n فإننا نرمز لإحداثيات العموم بالرموز $q_1,q_1,...,q_n$ وبصفة مركزة q_s حيث $s=1,2,..,n$

* سرعات العموم: تسمي $\dot{q}_s=\dfrac{\partial q_s}{\partial t}$ الكميات بسرعات العموم المنظرة لإحداثيات العموم q_s ويلاحظ أنه لا يشترط أن تكون وحدات سرعات العموم (طول \ زمن).

* كمية حركة العموم: تعرف بأنها $p_s=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$ ، وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t .

* القيود وأنواعها: تنقسم القيود التي وضعها علي حركة مجموعة من النقط المادية إلي نوعين أساسيين،

١) القيد التفاضلي أو الكينماتيكي ، وفيه تكون المعادلات المعبرة عن القيود تحتوي علي إحداثيات جميع العناصر أو بعضها وكذلك تفاضلاتها بالنسبة للزمن علاوة علي ظهور الزمن t صراحة.

٢) القيد الهندسي: وفيه لا تظهر السرعات $\dot{\vec{r}}_j$ في معادلات القيود وتكون تلك المعادلات علي الصورة

$$f(\vec{r}_j,t)=0$$

* قوي العموم: تسمي الكميات $\dfrac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\cdot Q_s=\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k$ بقوي العموم المصاحبة لإحداثيات العموم q_s ، $\vec{r}_k$ هي متجهات الموضع لعناصر المنظومة والتي عدد عناصرها N ، $\vec{F}_k$ هي القوي المؤثرة علي عناصر المنظومة.

(ب)

سوف نعرف كمية حركة العموم بأنها

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \qquad (1)$$

وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t أي أن

$$p_s=p_s(q_s,\dot{q}_s,t) \qquad (2)$$

والآن اعتبر دالة هاملتون H وتعرف بالعلاقة الآتية:

$$H = \sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - L \qquad (3)$$

وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t ، ولكن يمكن استخدام (٢) لحذف $\dot{q}_s$ لتكون بدلالة p_s, q_s, t وبذلك تكون الدالة H معتمدة علي p_s, q_s, t أي أن

$$H = H(q_s, p_s, t) \qquad (4)$$

وإذا استخدمنا الرمز Δ للتعبير عن الزيادة في أية دالة في المتغيرات q_s, p_s, t أو المتغيرات $q_s, \dot{q}_s, t$ نتيجة للتغيرات المتناهية الصغر في تلك المتغيرات أي $\Delta q_s, \Delta p_s, \Delta \dot{q}_s, \Delta t$ وبهذا فإن التغير في الدالة H والناشئ من تغير البارامترات التي تعتمد عليها الدالة والمعرفة في المعادلة (٣)، وحيث $L = L(q, \dot{q}, t)$ أن نجد إذن

$$\Delta H = \sum_s (p_s \Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \Delta p_s) - \sum_s \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \Delta \dot{q}_s\right) - \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t$$

وباستخدام تعريف كمية حركة العموم p_s في المعادلة (١) وكذلك من معادلات لاجرانج نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_s}, \qquad p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \quad \dot{p}_s = \frac{\partial L}{\partial q_s},$$

وبذلك فإن التغير الكلي في دالة هاملتون يأخذ الصورة التالية:

$$(5) \quad \Delta H = \sum_s \dot{q}_s \Delta p_s - \sum_s \dot{p}_s \Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t$$

والآن من مجموعة المعادلات (٢) وعددها n معادلة في مجموعة المجاهيل $\dot{q}_s$ والتي عددها n أيضاً فإنه يمكن الوصول علي مجموعة سرعات العموم كدوال في إحداثيات العموم q_s وكميات حركة العموم والزمن t أي أن

$$(6) \quad \dot{q}_s = \dot{q}_s(q_s, p_s, t)$$

وبالتعويض في المعادلة (٣) للتخلص من سرعات العموم $\dot{q}_s$ فإن دالة هاملتون تصبح في صورة المعادلة (٤)، وبإيجاد التغير فيها نجد أن

$$(7) \quad \Delta H = \sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \Delta q_s + \sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \Delta p_s + \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t$$

وحيث أن التغير في (٧) يجب أن يطابق تماماً التغير في (٥) وبما أن التغيرات $\Delta t, \Delta q_s, \Delta p_s$ هي تغيرات مستقلة عن بعضها البعض وبذلك تنتج المعادلات التالية

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad -\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (8)$$

ويتضح من هذه المعادلات أن دالة هاملتون H لا تعتمد صراحة علي الزمن إلا إذا اعتمدت دالة لاجرانج عليه، أي أنه إذا كان $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ فإنه أيضاً يكون $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ أما باقي المعادلات في (٨) فتعطينا معادلات الحركة

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (9)$$

وتسمي هذه المعادلات بمعادلات هاملتون القانونية وهي مكونة من عدد 2n معادلة تفاضلية من الرتبة الأولي والتي يؤدي حلها إلي تعيين عدد 2n مجهول منها n إحداثي عموم q_s ، n كمية حركة العموم p_s وهذه الكميات هي دوال في الزمن.

السؤال الثاني:

نوجد أولا: دالة لاجرانج $L=T-U=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-(q_1-q_2)^2$ ، من معادلات لاجرانج للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_s}, \qquad s=1,2$$

عندما $s=1$ يكون لدينا

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_1} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(\dot{q}_1)+2q_1=0 \;\Rightarrow\; \ddot{q}_1+2q_1=0 \qquad (١)$$

عندما $s=2$ يكون لدينا

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_2} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(\dot{q}_2)+2(q_1-q_2)=0 \;\Rightarrow\; \ddot{q}_2-2(q_1-q_2)=0 \qquad (2)$$

وبجمع وطرح هاتين المعادلتين نحصل علي التالي:

$$\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=0, \qquad \ddot{q}_1-\ddot{q}_2+4(q_1-q_2)=0$$

ويكون حل المعادلتين هو

$$q_1+q_2=2At+2B, \qquad q_1-q_2=2C\sin(2t+\tau)$$

حيث تكون الكميات A, B, C, τ ثوابت ونجد الحل إذن (بجمع وطرح المعادلات السابقة)

$$q_1=At+B+C\sin(2t+\tau), \qquad q_2=At+B-C\sin(2t+\tau)$$

ب) يعرف قوس بواسون لأي دالتين f, g كما يلي $\{f,g\}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial g}{\partial p_s}-\frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial g}{\partial q_s}\right)$ حيث n هي عدد إحداثيات العموم.

أما خواصه له $\qquad (1)\ \{f,f\}=0 \qquad (2)\ \{f,c\}=0 \qquad (3)\ \{f,g\}=-\{g,f\}$

أما متطابقة جاكوب فهي $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$ بشرط أن الدوال f,g,h تبقي في ترتيب دوري واحد.

السؤال الثالث:

ا) إذا كانت دالة هامتلون H لا تعتمد علي الزمن t فيكون $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ وكذلك من خواص أقواس بواسون يكون لدينا

$\{H,H\}=0$ الآن من العلاقة $$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\{H,H\}=0 \quad \Rightarrow \quad H=\text{constant}$$

أي أنا تكون ثابتة دائماً أثناء الحركة.

ب) يكون لدينا من أقواس بواسون كالتالي:

* بالنسبة للمتجه $\vec{r}$ يكون $\{x,x\}=\{y,y\}=\{z,z\}=0$

* بالنسبة للمتجه $\vec{p}$ يكون $\{p_x,p_x\}=\{p_y,p_y\}=\{p_z,p_z\}=0$

* بالنسبة للمتجه $\vec{r}$ مع $\vec{p}$ يكون

$$\{x,p_x\}=1,\quad \{x,p_y\}=0,\quad \{x,p_z\}=0$$
$$\{y,p_x\}=0,\quad \{y,p_y\}=1,\quad \{y,p_z\}=0$$
$$\{z,p_x\}=0,\quad \{z,p_y\}=0,\quad \{z,p_z\}=1$$

السؤال الرابع:

أ) دالة لاجرانج هي $L=T-U=\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+2\cos\theta$ ومنها نجد أنه يوجد إحداثي غير دوري وهو θ و يوجد إحداثي دوري وهو φ ولذلك تكون الشروط $\dot{\varphi}=w,\ \ \theta=\alpha$ وبجعل المشتقة الجزئية $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ تتلاشى وحيث أن

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=2\sin\theta\sin\theta\dot{\varphi}^2-2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)_{st}=2\sin\alpha\,(w^2\cos\alpha-1)=0$$

ويكون شرط انتظام الحركة هو $w^2=\sec\alpha$ ، فإذا كانت $\alpha=60^0$ فإن $w^2=2$ وتكون $w=\sqrt{2}$.

ب)

* الإحداثيات الدورية هي بعض إحداثيات العموم التي لا تظهر في دالة لاجرانج L بينما تظهر سرعات العموم المصاحبة لها في الدالة L.

* دالة راوس هي: $R=L(q_s,\dot{q}_s,\dot{r}_j,t)-\sum_{j=k+1}^{n}\dot{r}_j p_j$ ، حيث $q_s,\dot{q}_s,\dot{r}_j,t\ \dot{r}_j,p_j$ هي علي الترتيب إحداثيات العموم الغير دورية، سرعات العموم الغير دورية، سرعات العموم الدورية، الزمن، كميات حركة العموم الدورية.

الآن: حيث أن كميات حركة العموم p_j للإحداثيات الدورية هي $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}$ فيكون من معادلات لاجرانج أن

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial r_j} = 0 \qquad \Rightarrow \quad p_j = \text{const.} = \beta_j$$

كمية العموم المناظرة للإحداثيات الدورية تكون **ثابتة دائماً**.

لايجاد شرط انتظام الحركة يجب أن يكون $q_s = \alpha_s, \qquad \dot{q}_s = 0, \qquad \dot{r}_j = \Omega_j$

وفي هذه الحالة فان دالة لاجرانج $L = L(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j)$

لذلك

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = f_s(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0$$

وهذا يؤدي الي

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_{st} = 0$$

أيضا نجد أن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = g_j(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right) = 0$$

وهذا يؤدي الي

$$\left(\frac{\partial L}{\partial r_j}\right)_{st} = 0$$

مما سبق يتضح أن شرط انتظام الحركة يجب أن يكون

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_{q=\alpha,\ \dot{r}=\Omega} = 0$$

Dr. Ahmed mostafa